

Calcolo di integrali - svolgimento degli esercizi

1) Calcoliamo una primitiva di $\cos(3x)e^{5x}$. Integriamo due volte per parti, scegliendo $e^{5x}dx$ come fattore differenziale e $\cos(3x)$ come fattore finito. Si ha

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)e^{5x} dx &= \frac{e^{5x}}{5} \cos(3x) + \frac{3}{5} \int e^{5x} \sin(3x) dx \\ &= \frac{e^{5x}}{5} \cos(3x) + \frac{3}{5} \left[\frac{e^{5x}}{5} \sin(3x) - \frac{3}{5} \int \cos(3x)e^{5x} dx \right] \\ &= \frac{1}{5} e^{5x} \cos(3x) + \frac{3}{25} e^{5x} \sin(3x) - \frac{9}{25} \int \cos(3x)e^{5x} dx.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\frac{34}{25} \int \cos(3x)e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{25} (5 \cos(3x) + 3 \sin(3x)),$$

da cui

$$\int \cos(3x)e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{34} (5 \cos(3x) + 3 \sin(3x)) + C.$$

Indicando con I l'integrale richiesto, si ha

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{34} [e^{5x} (5 \cos(3x) + 3 \sin(3x))]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{34} (5e^{10\pi} - 5) = \frac{5}{34} (e^{10\pi} - 1).\end{aligned}$$

2) Lavoriamo come nell'esercizio precedente, integrando due volte per parti. A differenza dell'esercizio 1, consideriamo $\sin(2x)dx$ come fattore differenziale e e^{4x} come fattore finito. Si ha

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)e^{4x} dx &= -\frac{\cos(2x)}{2} e^{4x} + 2 \int e^{4x} \cos(2x) dx \\ &= -\frac{\cos(2x)}{2} e^{4x} + 2 \left[e^{4x} \frac{\sin(2x)}{2} - 2 \int \sin(2x)e^{4x} dx \right] \\ &= -e^{4x} \frac{\cos(2x)}{2} + e^{4x} \sin(2x) - 4 \int \sin(2x)e^{4x} dx.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$5 \int \sin(2x)e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{2} (2 \sin(2x) - \cos(2x)),$$

da cui

$$\int \sin(2x)e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{10} (2 \sin(2x) - \cos(2x)) + C.$$

Indicando con I l'integrale richiesto, si ha

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{10} [e^{4x} (2 \sin(2x) - \cos(2x))]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{10} (1 - e^{8\pi}).\end{aligned}$$

3) Osserviamo che la funzione integranda è pari. Indicato con I l'integrale richiesto, risulta

$$I = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \arctan(2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 \arctan x dx,$$

avendo utilizzato la sostituzione $x = 2t$.

Calcoliamo una primitiva di $x^2 \arctan x$, integrando per parti. Scegliendo $x^2 dx$ come fattore differenziale e $\arctan x$ come fattore finito, si ha

$$\int x^2 \arctan x dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx.$$

Effettuando la divisione tra i polinomi x^3 e $1+x^2$, si trova

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx.$$

Ricordando ora che una primitiva di $\frac{x}{1+x^2}$ è $\frac{1}{2} \log(1+x^2)$, si ha

$$\begin{aligned} \int x^2 \arctan x dx &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \log(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{24} [2x^3 \arctan x - x^2 + \log(1+x^2)]_0^1 \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2 \right). \end{aligned}$$

4) Di nuovo, la funzione integranda è pari. Effettuando la sostituzione $x = 2t$, si ha

$$I = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} t^2 \arccos(2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \arccos x dx.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \arccos x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{192} + \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale, effettuiamo la sostituzione $x = \sin y$, da cui $dx = \cos y dy$. In particolare, i nuovi estremi di integrazione sono $y = \arcsin 0 = 0$ e $y = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 y dy \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin y (1 - \cos^2 y) dy \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin y - \sin y \cos^2 y) dy \\ &= \frac{1}{12} \left[-\cos y + \frac{\cos^3 y}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{288}. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{\sqrt{3}\pi}{192} + \frac{5}{288} = \frac{1}{96} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pi + \frac{5}{3} \right).$$

5) Operando come nei due esercizi precedenti, si ha

$$I = 2 \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} t^2 \arcsin(2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 \arcsin x dx.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \arcsin x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{12} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{\pi}{96\sqrt{2}} - \frac{1}{12} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale, possiamo procedere come nell'esercizio precedente o, in alternativa, effettuare la sostituzione $x^2 = y$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{\sqrt{1-y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y-1+1}{\sqrt{1-y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{1-y} + \frac{1}{\sqrt{1-y}} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1-y)^{\frac{3}{2}} - 2(1-y)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{3} (1-y)^{\frac{3}{2}} - (1-y)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{\pi}{96\sqrt{2}} - \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{5}{6\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \right).$$

6) Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui numeratore e denominatore hanno lo stesso grado. Possiamo effettuare la divisione tra i polinomi $t^2 + 3t + 4$ e $t^2 + 4t + 5$ ottenendo

$$\frac{t^2 + 3t + 4}{t^2 + 4t + 5} = 1 - \frac{t + 1}{t^2 + 4t + 5},$$

oppure, equivalentemente, decomporre nel modo seguente

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 + 3t + 4 + 1 - t - 1}{t^2 + 4t + 5} dt &= \int \left(1 - \frac{t + 1}{t^2 + 4t + 5} \right) dt = t - \frac{1}{2} \int \frac{2t + 4 - 2}{t^2 + 4t + 5} dt \\ &= t - \frac{1}{2} \int \frac{2t + 4}{t^2 + 4t + 5} dt + \int \frac{1}{(t+2)^2 + 1} dt \\ &= t - \frac{1}{2} \log(t^2 + 4t + 5) + \arctan(t + 2) + C. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$I = \left[t - \frac{1}{2} \log(t^2 + 4t + 5) + \arctan(t + 2) \right]_{-2}^{-1} = 1 - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4}.$$

7) Procedendo come nell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 - t + 2}{t^2 - 2t + 2} dt &= \int \left(1 + \frac{t}{t^2 - 2t + 2} \right) dt \\ &= t + \frac{1}{2} \int \frac{2t - 2 + 2}{t^2 - 2t + 2} dt \\ &= t + \frac{1}{2} \int \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2} dt + \int \frac{1}{(t - 1)^2 + 1} dt \\ &= t + \frac{1}{2} \log(t^2 - 2t + 2) + \arctan(t - 1) + C. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$I = \left[t + \frac{1}{2} \log(t^2 - 2t + 2) + \arctan(t - 1) \right]_{1-\sqrt{3}}^1 = \sqrt{3} - \log 2 + \frac{\pi}{3}.$$

8) Usiamo la sostituzione $t^2 = \sinh x$, da cui si ottiene

$$x = \operatorname{settsinh} t^2 = \log(t^2 + \sqrt{t^4 + 1}) \quad \text{e} \quad t dt = \frac{\cosh x}{2} dx.$$

Inoltre

$$\sqrt{t^4 + 1} = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \cosh x.$$

I nuovi estremi di integrazione sono $x = \operatorname{settsinh} 0 = 0$ e $x = \operatorname{settsinh} 1 = \log(1 + \sqrt{2})$. Si ha quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \sinh^2 x dx.$$

Calcoliamo una primitiva di $\sinh^2 x$ integrando per parti.

$$\begin{aligned} \int \sinh^2 x dx &= \sinh x \cosh x - \int \cosh^2 x dx \\ &= \sinh x \cosh x - \int (1 + \sinh^2 x) dx \\ &= \sinh x \cosh x - x - \int \sinh^2 x dx. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\int \sinh^2 x dx = \frac{\sinh x \cosh x - x}{2} + C.$$

Quindi

$$I = \frac{1}{4} [\sinh x \cosh x - x]_0^{\log(1+\sqrt{2})}.$$

Per calcolare comodamente $\sinh x$ e $\cosh x$ in $x = \log(1 + \sqrt{2})$, può essere utile ritornare alla variabile t , ricordando che $\sinh x = t^2$, $\cosh x = \sqrt{t^4 + 1}$ e $x = \log(t^2 + \sqrt{t^4 + 1})$. Si ha, perciò

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} [\sinh x \cosh x - x]_0^{\log(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{4} \left[t^2 \sqrt{t^4 + 1} - \log(t^2 + \sqrt{t^4 + 1}) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) \right). \end{aligned}$$

9) Per la parità della funzione integranda, si ha

$$I = 2 \int_0^1 t^2 \sqrt{t^6 + 1} dt.$$

Effettuiamo ora la sostituzione $t^3 = \sinh x$, da cui si ottiene

$$x = \text{settsinh } t^3 = \log(t^3 + \sqrt{t^6 + 1}) \quad \text{e} \quad t^2 dt = \frac{\cosh x}{3} dx.$$

Inoltre

$$\sqrt{t^6 + 1} = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \cosh x.$$

Si ha

$$I = \frac{2}{3} \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \cosh^2 x dx.$$

Integrando per parti o, in alternativa, utilizzando la relazione

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2},$$

si trova che una primitiva di $\cosh^2 x$ è $\frac{\sinh x \cosh x + x}{2}$.

Calcoliamo ora una primitiva di $\cosh^2 x$ utilizzando un altro metodo. Ricordando che $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, si ha

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 x dx &= \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx \\ &= \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x} + \frac{1}{2} x \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} \right) + x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \right) + x \right) \\ &= \frac{\sinh x \cosh x + x}{2}, \end{aligned}$$

avendo ricordato che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Si ottiene quindi

$$I = \frac{1}{3} [\sinh x \cosh x + x]_0^{\log(1+\sqrt{2})}$$

e, ritornando alla variabile t

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} [\sinh x \cosh x + x]_0^{\log(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{3} \left[t^3 \sqrt{t^6 + 1} + \log(t^3 + \sqrt{t^6 + 1}) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right). \end{aligned}$$

10) Utilizzando la sostituzione $\sqrt{x} = \sinh t$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cosh t dt \quad \text{e} \quad \sqrt{x+1} = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \cosh t.$$

Si ottiene quindi

$$I = 2 \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = 2 [t]_0^{\log(1+\sqrt{2})} = 2 \log(1 + \sqrt{2}).$$

11) Osserviamo che la funzione integranda è pari.

Inoltre, la presenza di $\cos x$ al numeratore suggerisce la sostituzione $\sin x = t$. Si ha subito

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2 [\text{settsinh } t]_0^1 \\ &= 2 \left[\log(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right]_0^1 = 2 \log(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

12) Effettuiamo la sostituzione $\cos x = t$, da cui si ottiene

$$I = - \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \log(1 + \sqrt{2}),$$

utilizzando il conto eseguito nell'esercizio precedente.

13) Si tratta di un integrale che deve essere trattato con un po' di attenzione. Effettuiamo un raccoglimento al denominatore. Si ha

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 x (\tan^2 x + 2)} dx.$$

A questo punto, sembra naturale usare la sostituzione $t = \tan x$, mediante la quale i nuovi estremi di integrazione sono $t = \tan 0 = 0$ e $t = \tan 2\pi = 0$. Ne risulterebbe $I = 0$. Il risultato è, evidentemente, falso dato che I è un integrale di una funzione positiva su un intervallo di ampiezza non nulla.

La sostituzione $t = \tan x$ è lecita sugli intervalli in cui la funzione $t = \tan x$ è iniettiva, e ciò non si verifica nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Per poterla utilizzare, è necessario suddividere $[0, 2\pi]$ in sottointervalli nei quali $t = \tan x$ sia invertibile.

Grazie alla periodicità (di periodo π) di $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$, valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x (\tan^2 x + 2)} dx. \end{aligned}$$

Nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la sostituzione $t = \tan x$ è lecita. Effettuandola, si ottiene

$$I = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2} dt,$$

grazie alla parità della funzione integranda.

Calcoliamo l'integrale improprio mediante la definizione, ricordando che una primitiva di $\frac{1}{t^2 + 2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$ è $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$. Si ha

$$I = 2\sqrt{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^b = \sqrt{2}\pi.$$

14) Operando come nell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x (2 \tan^2 x + 3)} dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t^2 + 3} dt \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t^2 + 3} dt = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{6} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right) \right]_0^b = \frac{\pi}{3}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

15) Effettuiamo qualche passaggio che ci permette di eliminare il valore assoluto. Si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \arctan \sqrt{1 + 2|x|} dx = 2 \int_0^1 \arctan \sqrt{1 + 2x} dx \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} t \arctan t dt, \end{aligned}$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{1+2x} = t$.

Calcoliamo una primitiva di $2t \arctan t$ integrando per parti.

$$\begin{aligned}\int 2t \arctan t dt &= t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= t^2 \arctan t - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = [(t^2 + 1) \arctan t - t]_1^{\sqrt{3}} = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1.$$

16) Eliminiamo il valore assoluto con gli stessi passaggi dell'esercizio precedente. Si ha

$$I = 2 \int_0^1 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2+2x}} dx = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 t \arcsin \left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{2+2x} = t$. Integriamo per parti e otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^2 2t \arcsin \left(\frac{1}{t}\right) dt &= \left[t^2 \arcsin \left(\frac{1}{t}\right)\right]_{\sqrt{2}}^2 - \int_{\sqrt{2}}^2 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \left[t^2 \arcsin \left(\frac{1}{t}\right)\right]_{\sqrt{2}}^2 + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} dt \\ &= \frac{\pi}{6} + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \frac{\pi}{6} + \left[\sqrt{t^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1,\end{aligned}$$

avendo osservato che una primitiva di $\frac{t}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}$ è $\sqrt{t^2-1}$.

17) Utilizziamo la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$, da cui si ha $dx = 2t dt$. Si ottiene

$$I = 2 \int_0^{\pi} t^2 \sin t dt.$$

Calcoliamo una primitiva di $t^2 \sin t$ integrando due volte per parti.

$$\begin{aligned}\int t^2 \sin t dt &= -t^2 \cos t + 2 \int t \cos t dt \\ &= -t^2 \cos t + 2 \left(t \sin t - \int \sin t dt\right) \\ &= (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t + C.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2 [(2 - t^2) \cos t + 2t \sin t]_0^{\pi} = 2(\pi^2 - 4).$$

18) È dello stesso tipo dell'integrale dell'esercizio precedente. Effettuando gli stessi passaggi, si ha

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2 \sin t dt = 2 \left[(2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{3} - 2 - \frac{\pi^2}{9}. \end{aligned}$$

19) Lavoriamo sul denominatore. Si ha

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}^{\frac{\sqrt{8}+1}{2}} \frac{1}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+1}} dx = \frac{1}{4} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt,$$

avendo usato la sostituzione $2x-1=t$.

Proseguiamo ora utilizzando la sostituzione $\sqrt{t^2+1}=y$, da cui si ha $t dt = y dy$ e $t^2 = y^2 - 1$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{t}{t^2\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_2^3 \frac{y}{y(y^2-1)} dy \\ &= \int_2^3 \frac{1}{y^2-1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| \right]_2^3 = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$I = \frac{1}{8} \log \frac{3}{2}.$$

20) Ripercorriamo i passaggi dell'esercizio precedente operando in modo leggermente differente. Si ha

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}^{\frac{\sqrt{8}+1}{3}} \frac{1-3x}{(1-3x)^2\sqrt{(1-3x)^2+1}} dx = -\frac{1}{6} \int_2^3 \frac{1}{y^2-1} dy,$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{(1-3x)^2+1}=y$, da cui si ha $(1-3x)dx = -\frac{1}{3}ydy$. Utilizzando quanto calcolato nell'esercizio precedente, si trova

$$I = -\frac{1}{12} \log \frac{3}{2} = \frac{1}{12} \log \frac{2}{3}.$$

21) Decomponiamo opportunamente la funzione integranda. Si ha

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{(1 + x^2)^2} = \frac{5(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} - \frac{2x}{(1 + x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}$$

e

$$\int \frac{x^2 - 2x + 5}{(1 + x^2)^2} dx = 5 \arctan x + \frac{1}{1 + x^2} - 4 \int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx.$$

Calcoliamo ora una primitiva di $\frac{x^2}{(1 + x^2)^2}$ integrando per parti.

Consideriamo x come fattore finito e $\frac{x}{(1 + x^2)^2} dx$ come fattore differenziale, osservando che una primitiva di $\frac{x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$ è data da $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx &= \int x \cdot \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx \\ &= -\frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= -\frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

Quindi, una primitiva di $\frac{x^2 - 2x + 5}{(1 + x^2)^2}$ è data da

$$5 \arctan x + \frac{1}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2} - 2 \arctan x = 3 \arctan x + \frac{2x + 1}{1 + x^2}$$

e l'integrale richiesto vale

$$I = \left[3 \arctan x + \frac{2x + 1}{1 + x^2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2}.$$

22) Ripetendo i passaggi effettuati nel calcolo dell'integrale precedente, si trova

$$I = \pi + 1.$$

23) Lavorando sul denominatore, si ottiene

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{x} = t$. Quindi, si trova

$$I = \left[\arcsin t \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{12}.$$

In alternativa, l'esercizio può essere svolto nel modo seguente.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} [\arcsin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Quest'ultimo procedimento è utilizzato anche per il calcolo dell'integrale successivo.

24) Si ha

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} dx = \frac{1}{3} [\arcsin(3x-1)]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

25) Si ha

$$I = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx.$$

Utilizzando la sostituzione $\sqrt{x} = \sin t$ si trova

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \cos t dt \quad \text{e} \quad \sqrt{1-x} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t,$$

osservando che, nell'intervallo di integrazione, $\cos t$ è positivo. Perciò si ottiene

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} [t - \sin t \cos t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{24}.$$

Ricordiamo che una primitiva di $\sin^2 t$ si può trovare integrando per parti, analogamente a quanto fatto nell'esercizio 8.

26) Per il calcolo di questo integrale, utilizziamo un metodo alternativo a quello proposto nell'esercizio precedente. Decomponiamo in questo modo

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{9} \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{-9x+3-3}{\sqrt{6x-9x^2}} dx = -\frac{1}{9} \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{-9x+3}{\sqrt{6x-9x^2}} dx + \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{9} \left[\sqrt{6x-9x^2} \right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{\pi}{18} = -\frac{1}{18}(\pi+2).\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale, abbiamo utilizzato il risultato ottenuto nell'esercizio 24.

27) Decomponiamo la funzione integranda nel seguente modo

$$\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x).$$

Si ottiene

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx = \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{24}.$$

28) Decomponiamo la funzione integranda nel seguente modo

$$\tan^3 x = \tan x(1 + \tan^2 x - 1) = (1 + \tan^2 x) \tan x - \tan x.$$

Ricordando che una primitiva di $(1 + \tan^2 x) \tan x$ è $\frac{\tan^2 x}{2}$, si ha

$$I = \left[\frac{\tan^2 x}{2} + \log |\cos x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \log 3.$$

29) Poniamo $x^4 = t$ e integriamo per parti. Si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{16} 2x^3 \log(x^4) dx = \frac{1}{2} \int_1^{16} \log t dt \\ &= \frac{1}{2} [t \log t - t]_1^{16} \\ &= \frac{1}{2} (16 \log 16 - 15) \\ &= 32 \log 2 - \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

30) Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} I &= 6 \int_2^3 x^2 \log x dx = 2 \left[x^3 \log x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 \\ &= 2 \left(27 \log 3 - 8 \log 2 - \frac{19}{3} \right). \end{aligned}$$

31) Scrivendo opportunamente la quantità sotto radice, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}} dx \\ &= \left[\operatorname{settsinh} \left(\frac{x-1}{2} \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \left[\log \left(\frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} \right) \right]_{-1}^1 \\ &= -\log(\sqrt{2} - 1) = \log \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)} = \log(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

32) Lavorando come nell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1-\sqrt{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+2}} dx = \frac{1}{2} \int_{1-\sqrt{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{settsinh} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) \right]_{1-\sqrt{2}}^1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{settsinh} 0 - \operatorname{settsinh} (-1)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{settsinh} 0 + \operatorname{settsinh} 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

33) Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\cos x$. Utilizziamo, inoltre, la formula di duplicazione

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

e la relazione fondamentale $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Otteniamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1 - 2\sin^2 x) \cos x}{(2\sin x + 3)(1 - \sin^2 x)} dx.$$

Effettuando la sostituzione $\sin x = t$, si ottiene l'integrale di una funzione razionale fratta.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - 2t^2)}{(2t + 3)(1 - t^2)} dt.$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{(1 - 2t^2)}{(2t + 3)(1 - t^2)}$ usando il metodo di decomposizione per fratti semplici.

$$\begin{aligned}
 \frac{(1 - 2t^2)}{(2t + 3)(1 - t)(1 + t)} &= \frac{A}{2t + 3} + \frac{B}{1 - t} + \frac{C}{1 + t} \\
 &= \frac{(-A + 2B - 2C)t^2 + (5B - C)t + A + 3B + 3C}{(2t + 3)(1 - t)(1 + t)},
 \end{aligned}$$

da cui si trova

$$A = \frac{14}{5}, \quad B = -\frac{1}{10}, \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{7}{5} \int \frac{2}{2t + 3} dt + \frac{1}{10} \int \frac{1}{t - 1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + t} dt \\
 &= \left[\frac{7}{5} \log |2t + 3| + \frac{1}{10} \log |t - 1| - \frac{1}{2} \log |1 + t| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{14}{5} \log 2 - \frac{1}{10} \log 2 - \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} - \frac{7}{5} \log 3 \\
 &= \left(\frac{14}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \right) \log 2 - \left(\frac{7}{5} + \frac{1}{2} \right) \log 3 \\
 &= \frac{16}{5} \log 2 - \frac{19}{10} \log 3.
 \end{aligned}$$

34) Ripercorrendo i passaggi svolti nell'esercizio precedente, si trova

$$I = \frac{20}{7} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{23}{21} \log 11.$$

35) Usiamo la sostituzione $\log x = t$ mediante la quale l'integrale proposto si riconduce a un integrale di una funzione razionale fratta. Si ha

$$I = \int_0^{\log 2} \frac{t}{4 - t^2} dt.$$

Utilizziamo il metodo di decomposizione per fratti semplici e otteniamo

$$\frac{t}{4 - t^2} = \frac{A}{2 - t} + \frac{B}{2 + t} = \frac{(A - B)t + 2(A + B)}{4 - t^2},$$

da cui si ricava $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\log 2} \left(\frac{1}{2 - t} - \frac{1}{2 + t} \right) dt = -\frac{1}{2} [\log |4 - t^2|]_0^{\log 2} \\ &= -\frac{1}{2} (\log(4 - \log^2 2) - \log 4) \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} \log(4 - \log^2 2). \end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrale proposto può essere calcolato più rapidamente osservando che una primitiva di $\frac{t}{4 - t^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2t}{4 - t^2}$ è $\log |4 - t^2|$, oppure usando la sostituzione $\log^2 x = t$, come illustrato nell'esercizio successivo.

36) Poniamo $\log^2 x = t$. Si ottiene $\frac{\log x}{x} dx = \frac{dt}{2}$ e

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\log^2 2} \frac{1}{6 - t} dt = -\frac{1}{2} [\log |6 - t|]_0^{\log^2 2} \\ &= \frac{1}{2} \log 6 - \frac{1}{2} \log(6 - \log^2 2). \end{aligned}$$

37) Per il calcolo dell'integrale richiesto, utilizziamo la decomposizione $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$ e la sostituzione $\cos x = t$. Si ottiene

$$I = - \int_1^0 (1 - t^2) \log(1 + t^2) dt = \int_0^1 (1 - t^2) \log(1 + t^2) dt.$$

Calcoliamo una primitiva di $(1 - t^2) \log(1 + t^2)$ integrando per parti, considerando $(1 - t^2)dt$ come fattore differenziale e $\log(1 + t^2)$ come fattore finito.

$$\begin{aligned} \int (1 - t^2) \log(1 + t^2) dt &= \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \log(1 + t^2) - 2 \int \frac{t^2 - \frac{t^4}{3}}{t^2 + 1} dt \\ &= \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \log(1 + t^2) + \frac{2}{3} \int \frac{t^4 - 3t^2}{t^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale, effettuiamo la divisione tra i polinomi $t^4 - 3t^2$ e $t^2 + 1$. Si ottiene

$$\frac{t^4 - 3t^2}{t^2 + 1} = t^2 - 4 + \frac{4}{t^2 + 1}.$$

Perciò

$$\int \frac{t^4 - 3t^2}{t^2 + 1} dt = \frac{t^3}{3} - 4t + 4 \arctan t + C$$

e l'integrale richiesto vale

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right) \log(1 + t^2) + \frac{2}{3} \left(\frac{t^3}{3} - 4t\right) + \frac{8}{3} \arctan t \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \log 2 + \frac{2}{3} \pi - \frac{22}{9}. \end{aligned}$$

38) Usiamo la decomposizione $\cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$ e la sostituzione $\sin x = t$. Si ottiene

$$I = \int_0^1 (1 - t^2) \log(3 + t^2) dt.$$

Ripercorrendo i passaggi svolti nell'esercizio precedente, si trova

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right) \log(3 + t^2) + \frac{2}{3} \left(\frac{t^3}{3} - 6t\right) + 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \left(\log 4 + \sqrt{3} \pi - \frac{17}{3} \right). \end{aligned}$$

39) Esaminiamo il segno della quantità $4 - \log^2 x$. Si ha

$$4 - \log^2 x > 0 \Leftrightarrow -2 < \log x < 2 \Leftrightarrow e^{-2} < x < e^2.$$

Si trova, quindi, che nell'intervallo di integrazione risulta $4 - \log^2 x > 0$ e $|4 - \log^2 x| = 4 - \log^2 x$. Si ha

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x(9 - \log^2 x)} dx.$$

Utilizzando la sostituzione $\log x = t$, si ottiene

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{9 - t^2} dt = \frac{1}{6} \int_0^{\log 2} \left(\frac{1}{3 + t} + \frac{1}{3 - t} \right) dt \\ &= \frac{1}{6} \left[\log \frac{|3 + t|}{|3 - t|} \right]_0^{\log 2} \\ &= \frac{1}{6} \log \frac{3 + \log 2}{3 - \log 2}. \end{aligned}$$

40) Osserviamo che $4 - \log^2 x$ è positivo nell'intervallo di integrazione. Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova

$$I = \frac{1}{8} \log \frac{4 + \log 3}{4 - \log 3}.$$

41) Utilizzando la seguente decomposizione

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$$

si ottiene

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x \sin x}{\cos x} dx.$$

Il primo integrale è immediato e vale $\frac{1}{4}$, il secondo si può risolvere utilizzando la sostituzione $\cos x = t$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x \sin x}{\cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2 \cos^2 x - 1) \sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(2t^2 - 1)}{t} dt \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2t - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \left[t^2 - \log |t| \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{4} + \log \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} + \log \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(1 + \log \frac{2}{3} \right).$$

42) Utilizzando la seguente decomposizione

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x \cos x}{\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx.$$

Ora, si ha

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx = \frac{1}{2}.$$

Il primo integrale si può risolvere utilizzando la sostituzione $\sin x = t$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x \cos x}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - 2 \sin^2 x) \cos x}{\sin x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1 - 2t^2)}{t} dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t} - 2t \right) dt \\ &= [\log |t| - t^2]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} \log 3 - 1.$$

43) Utilizzando la sostituzione $x^2 = t$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t e^{2t} dt.$$

Ora, una primitiva di $t e^{2t}$ può essere facilmente ottenuta integrando per parti, considerando t come fattore finito e $e^{2t} dt$ come fattore differenziale.

$$\int t e^{2t} dt = t \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} = \frac{e^{2t}}{4} (2t - 1) + C.$$

Si ha quindi

$$I = \frac{1}{4} [e^{2t} (2t - 1)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

44) Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene

$$I = \frac{1}{6}.$$

45) Dalla disparità della funzione $f(x) = \arctan x$, segue

$$\arctan(-2x) = -\arctan(2x).$$

Usando poi la semplice sostituzione $2x = t$, si ha

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\arctan t}{(1+t)^2} dt.$$

Cerchiamo una primitiva di $-\frac{\arctan t}{(1+t)^2}$ integrando per parti, considerando $\arctan t$ come fattore finito e $-\frac{1}{(1+t)^2}dt$ come fattore differenziale.

Ricordando che una primitiva di $-\frac{1}{(1+t)^2}$ è $\frac{1}{1+t}$, si ha

$$-\int \frac{\arctan t}{(1+t)^2} dt = \frac{\arctan t}{(1+t)} - \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} dt.$$

Decomponiamo ora

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} &= \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \\ &= \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A+C}{(1+t)(1+t^2)} \end{aligned}$$

ottenendo $A = C = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \log|1+t| - \frac{1}{4} \log(1+t^2) + \frac{1}{2} \arctan t + C. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \right) \arctan t - \frac{1}{2} \log|1+t| + \frac{1}{4} \log(1+t^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 2 \right) \\ &= -\frac{1}{8} \log 2. \end{aligned}$$

46) Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova

$$I = -\frac{1}{12} \log 2.$$

47) Per calcolare questo integrale, utilizziamo la sostituzione $2\cos(2x) = t$ da cui si ottiene $-4\sin(2x)dx = dt$, cioè $-8\sin x \cos x dx = dt$.

Si ha quindi

$$I = -\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt.$$

Calcoliamo una primitiva di $\frac{1}{(1+t^2)^2}$ utilizzando quanto ottenuto nell'esercizio 21. Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt &= \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \arctan t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2} \arctan t \\ &= \frac{1}{2} \left(\arctan t + \frac{t}{(1+t^2)} \right) + C. \end{aligned}$$

Quindi, si ottiene

$$I = -\frac{1}{2} \left[\arctan t + \frac{t}{(1+t^2)} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}.$$

48) Utilizziamo la formula di duplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

e la sostituzione $1 - \cos x = t$ da cui si ottiene $\sin x dx = dt$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} I &= 30 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \sqrt{1 - \cos x} dx \\ &= 30 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t) \sqrt{t} dt = 30 \int_0^{\frac{1}{2}} (t^{1/2} - t^{3/2}) dt \\ &= 60 \left[\frac{t^{3/2}}{3} - \frac{t^{5/2}}{5} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 60 \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{40} \right) \\ &= 5\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

49) Utilizzando la formula di bisezione

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1 - \cos x}{2},$$

si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x(1 - \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x - x \cos x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos x dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale integrando per parti. Si ottiene

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Quindi

$$I = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} [x \sin x + \cos x]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + 1.$$