1.1 Integrali indefiniti

Calcolare i seguenti integrali e verificare i risultati ottenuti:

1)

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx; \qquad \int \frac{3x}{2x-1}\,dx.$$

Per il primo integrale osserviamo che

$$(x^2+1)' = 2x,$$

dunque si ha

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto, si ha

$$\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Per il secondo abbiamo, grazie alle proprietà degli integrali,

$$\int \frac{3x}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}\cdot 3x}{2x-1}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-1+1}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{2x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x-1}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int dx + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\ln|2x-1| + c.$$

Si ha

$$\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\ln|2x-1|+c\right)' = \frac{3}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2x-1} = \frac{3x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{2x-1} = \frac{3x}{2x-1}.$$

Il risultato ottenuto è esatto.

2)

$$\int \tan^2 x\,dx; \qquad \int \frac{x^4-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$$

Abbiamo

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \tan x - x + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto:

$$(\tan x - x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

Per il secondo basta osservare che

$$\frac{x^4-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2(x-1)+x-1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} = x+1.$$

Dunque

$$\int \frac{x^4-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + c.$$

Il risultato è vero, infatti

$$\left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)' = \frac{2x}{2} + 1 = x+1.$$

3)

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,dx; \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx.$$

Per il primo integrale usiamo il metodo della sostituzione, poniamo

$$x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt,$$

si ha

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2-t}\,dt =$$

$$= \int \frac{2}{t-1}\,dt = 2\ln|t-1| + c = 2\ln|\sqrt{x}-1| + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto, abbiamo

$$(2\ln|\sqrt{x}-1| + c)' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x-\sqrt{x}}.$$

Anche per risolvere il secondo integrale usiamo il metodo della sostituzione, poniamo

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x dx = dt.$$

Si ha

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt =$$

$$= \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + c = \ln|\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}| + c.$$

Deriviamo la funzione ottenuta

$$(\ln|\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}| + c)' = \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})' =$$

$$= \frac{\cos x + \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x} + \sin x\cos x}{(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})\sqrt{1+\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{\cos x(\sqrt{1+\sin^2 x} + \sin x)}{(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

Il risultato ottenuto è esatto.

4)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx, \quad \text{suggerimento: si ponga } x = \sin^2 t.$$

Sostituiamo, come da suggerimento $x = \sin^2 t \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sin t\cos t dt$, otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int \frac{2\sin t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}}\,dt =$$

$$= \int \frac{2\sin t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}\,dt = 2\int dt = 2t + c = 2\arcsin\sqrt{x} + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto si ha

$$(2 \arcsin \sqrt{x} + c)' = 2 \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Osserviamo che avremmo, più semplicemente, potuto anche porre $x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt$, ottenendo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \int \frac{2t}{t\sqrt{(1-t^2)}}\, dt = 2 \arcsin t + c = 2 \arcsin \sqrt{x} + c.$$

5)

$$\int x \sin x \, dx; \qquad \int x^2 e^{3x}\, dx.$$

In questo esercizio utilizziamo il metodo di integrazione per parti. Per il primo abbiamo

$$\int x \sin x \, dx = \int x(-\cos x)'\, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Il risultato è esatto, infatti

$$(-x \cos x + \sin x + c)' = -\cos x + x \sin x + \cos x = x \sin x.$$

Per il secondo, applicando il suddetto metodo, otteniamo

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \int x^2 \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int 2x e^{3x}\, dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} \int 3e^{3x}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + c = \frac{1}{27}(9x^2 - 6x + 2) e^{3x} + c.$$

Deriviamo la funzione ottenuta, si ha

$$\left(\frac{1}{27}(9x^2 - 6x + 2)e^{3x} + c\right)' = \frac{1}{27}[(18x - 6)e^{3x} + 3(9x^2 - 6x + 2)e^{3x}] =$$

$$= \frac{1}{27}[(27x^2 - 18x + 18x - 6 + 6)e^{3x}] = x^2 e^{3x}.$$

Il risultato è esatto.

6)

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx; \qquad \int x(\arctan x)^2\,dx.$$

Anche in questo caso usiamo il metodo di integrazione per parti. Per il primo integrale si ha

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int (2\sqrt{x})' \ln x\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c.$$

Deriviamo la funzione ottenuta

$$(2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c)' = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Per il secondo integrale si ha

$$\int x(\arctan x)^2\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan^2 x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - \int \arctan x\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - \int (x)'\arctan x\,dx + \frac{1}{2}\arctan^2 x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\arctan^2 x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\arctan^2 x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan^2 x + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto

$$\left(\frac{x^2}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan^2 x + c\right)' =$$

$$= \frac{2x}{2} \arctan^2 x + 2\frac{x^2}{2} \arctan x \frac{1}{1+x^2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2} 2 \arctan x \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= x \arctan^2 x + \frac{x^2 \arctan x - x^2 \arctan x - \arctan x + \arctan x}{1+x^2} = x \arctan^2 x.$$

1.2 Integrali definiti

Calcolare i seguenti integrali definiti:

1)

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\, dx; \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx.$$

Per il primo integrale usiamo il metodo della sostituzione. Poniamo

$$x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t dt.$$

Inoltre

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

e

$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t = 2.$$

dunque

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\, dx = 2\int_1^2 t \frac{1+t}{t^4}\, dt =$$

$$= 2\int_1^2 \frac{1+t}{t^3}\, dt = 2\int_1^2 \frac{1}{t^3}\, dt + 2\int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt =$$

$$= \frac{2}{-3+1}[t^{-2}]_1^2 + \frac{2}{-2+1}[t^{-1}]_1^2 = -\frac{1}{4} + 1 - 1 + 2 = \frac{7}{4}.$$

Per il secondo si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx = \int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x+1)}\, dx.$$

Determiniamo A e B tali che

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Dobbiamo perciò risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-1 \quad \text{e} \quad B=2.$$

Dunque si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = -\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= -[\ln(x+1)]_0^1 + 2[\ln(x+2)]_0^1 = -\ln 2 + \ln 1 + 2\ln 3 - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln 9 - \ln 8 = \ln\frac{9}{8}.$$

2)

$$\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}\,dx.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore della funzione integranda per $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}$ si ottiene

$$\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+9}-\sqrt{x})(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}\,dx =$$

$$= \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{x+9-x}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^{16} (\sqrt{x+9}+\sqrt{x})\,dx.$$

Dunque per la linearità dell'integrale, si ha

$$\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^{16} (x+9)^{\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{9}\int_0^{16} x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}[\sqrt{(x+9)^3}]_0^{16} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_0^{16} =$$

$$= \frac{2}{27}[5^3-3^3] + \frac{2}{27}\cdot 4^3 = \frac{2}{27}[98+64] = 12.$$

3)

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Per il primo integrale usiamo il metodo della sostituzione, poniamo

$$\frac{1}{x}=t \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x^2}dx,$$

si ha

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \text{e} \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}.$$

Abbiamo

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^t\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t\, dt =$$

$$= [e^t]_{1/2}^1 = e - \sqrt{e}.$$

Anche per risolvere il secondo integrale usiamo il metodo della sostituzione, poniamo

$$x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt,$$

dunque

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \text{e} \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0.$$

Si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t} \cdot t\, dt = 2\int_0^1 \frac{t^3}{1+t}\, dt.$$

Dividiamo il polinomio al numeratore per quello al denominatore, otteniamo

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^1 \frac{(t^2-t+1)(1+t)-1}{1+t}\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 (t^2-t+1)\, dt - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 t^2\, dt - 2\int_0^1 t\, dt + 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt =$$

$$= \frac{2}{3}[t^3]_0^1 - [t^2]_0^1 + 2[t]_0^1 - 2[\ln(1+t)]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 + 2 - 2\ln 2 = \frac{5}{3} - 2\ln 2.$$

4)

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx; \qquad \int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1}\, dx;$$

Per risolvere il primo integrale applichiamo il metodo di integrazione per parti, si ha

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx = \int_0^{\pi} x^3(-\cos x)'\, dx = -[x^3\cos x]_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx =$$

$$= -[x^3\cos x]_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} x^2(\sin x)'\, dx = -[x^3\cos x]_0^{\pi} + 3[x^2\sin x]_0^{\pi} - 6\int_0^{\pi} x\sin x\, dx =$$

$$= -[x^3 \cos x]_0^{\pi} + 3[x^2 \sin x]_0^{\pi} - 6 \int_0^{\pi} x(-\cos x)'\, dx =$$

$$= -[x^3 \cos x]_0^{\pi} + 3[x^2 \sin x]_0^{\pi} + 6[x \cos x]_0^{\pi} - 6 \int_0^{\pi} \cos x\, dx =$$

$$= -[x^3 \cos x]_0^{\pi} + 3[x^2 \sin x]_0^{\pi} + 6[x \cos x]_0^{\pi} - 6[\sin x]_0^{\pi} = \pi^3 - 6\pi.$$

Per il secondo basta osservare che la funzione integranda è dispari, infatti

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \sin[2(-x)]}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2(-\sin(2x))}{x^2 + 1} = -\frac{x^2 \sin(2x)}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Dunque l'integrale considerato è nullo, essendo la funzione assegnata integrata tra -3 e 3.

5)

$$\int_{-1}^{1} x \arctan x\, dx; \qquad \int_0^1 \arctan x\, dx.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, notiamo che la funzione integranda è pari dunque

$$\int_{-1}^{1} x \arctan x\, dx = 2 \int_0^1 x \arctan x\, dx.$$

Usiamo il metodo di integrazione per parti, otteniamo

$$\int_{-1}^{1} x \arctan x\, dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan x\, dx =$$

$$= [x^2 \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}\, dx = [x^2 \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= [x^2 \arctan x]_0^1 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx = [x^2 \arctan x]_0^1 - [x]_0^1 + [\arctan x]_0^1 =$$

$$= \arctan 1 - 1 + \arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Anche per il secondo integrale usiamo il metodo di integrazione per parti, abbiamo

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = \int_0^1 (x)' \arctan x\, dx = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= [x \arctan x]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2}\, dx = [x \arctan x]_0^1 - \frac{1}{2}[\ln(1 + x^2)]_0^1 =$$

$$= \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

6)

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx; \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Per il primo integrale usiamo il metodo della sostituzione, poniamo

$$e^x - 1 = t^2 \quad\Rightarrow\quad e^x dx = 2t dt,$$

dunque

$$x = \ln 5 \quad\Rightarrow\quad e^{\ln 5} - 1 = 5 - 1 = 4 = t^2 \quad\Rightarrow\quad t = 2$$

e

$$x = 0 \quad\Rightarrow\quad e^0 - 1 = 0 = t^2 \quad\Rightarrow\quad t = 0.$$

Otteniamo

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = \int_0^2 \frac{2t\cdot t}{t^2+4}\,dt =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt = 2\int_0^2 dt - 8\int_0^2 \frac{1}{t^2+4}\,dt =$$

$$= 2[t]_0^2 - \frac{8}{2}\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt = 4 - \frac{8}{2}[\arctan\frac{t}{2}]_0^2 = 4 - \frac{8}{2}\frac{\pi}{4} = 4 - \pi.$$

Per l'ultimo integrale dividiamo il polinomio al numeratore per quello al denominatore, abbiamo

$$x^3 = (x^2 - 3x + 2)(x + 3) + 7x - 6,$$

dunque

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x+3)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7x-6}{x^2-3x+2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (x+3)\,dx + \frac{7}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-12/7}{x^2-3x+2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx + \frac{7}{2}\cdot\frac{9}{7}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Ora osserviamo che $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, dunque determiniamo A e B tali che

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1},$$

da cui, risolvendo il seguente sistema,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases}$$

si ottiene $A = 1$ e $B = -1$. Dunque

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}[\ln|x^2 - 3x + 2|]_0^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{9}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{9}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}[\ln|x^2 - 3x + 2|]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}[\ln|x-2|]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}[\ln|x-1|]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\ln\frac{3}{4} - \frac{7}{2}\ln 2 + \frac{9}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{9}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{13}{8} + 8\ln 3 - 15\ln 2.$$

1.3 Integrali impropri

Calcolare i seguenti integrali impropri (o provarne la divergenza):

1)

$$\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

Poniamo

$$x - 1 = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt,$$

si ha

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{e} \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Dunque

$$\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{2t(t^2+1)dt}{t} = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 \frac{2t(t^2+1)dt}{t} =$$

$$= 2\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 (t^2 + 1)\,dt = 2\lim_{\delta \to 0} \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_\delta^1 =$$

$$= 2\lim_{\delta \to 0} \left[\frac{1}{3} + 1 - \frac{\delta^3}{3} - \delta\right] = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

L'integrale considerato converge e vale $\frac{8}{3}$.

2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$$
Per definizione, essendo la funzione integranda definita su tutto $\mathbb{R}$, si ha
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_{c}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx,$$
per qualche c. Quindi per verificare se l'integrale è convergente dobbiamo dimostrare che entrambi gli integrali della precedente espressione convergono. Osserviamo però che

$$\frac{2x}{x^2+1} \sim \frac{1}{x} \quad \text{quando } x \to +\infty,$$

quindi per il teorema del confronto asintotico

$$\int_{c}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

ha lo stesso comportamento

$$\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

che diverge. L'integrale proposto è dunque divergente.

3)
$$\int_0^1 x\ln x\,dx.$$
Abbiamo
$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 x\ln x\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_\delta^1 - \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= -\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2}{2}\ln\delta - \frac{1}{4}\lim_{\delta\to 0}[1-\delta^2] = -\frac{1}{4}.$$
L'integrale considerato converge.

4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Abbiamo, per definizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{c}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Verifichiamo che entrambi gli integrali sono convergenti. Si ha

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\delta\to-\infty} \int_{\delta}^{c} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{\delta\to-\infty} \int_{\delta}^{c} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{\delta\to-\infty} [\arctan(x+1)]_{\delta}^{c} =$$

$$= \arctan(c+1) - \lim_{\delta\to-\infty} \arctan(\delta+1) = \arctan(c+1) - \arctan[\lim_{\delta\to-\infty}(\delta+1)] =$$

$$= \arctan(c+1) + \frac{\pi}{2}.$$

Per il secondo, procedendo nello stesso modo, abbiamo

$$\int_{c}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\delta\to+\infty} \int_{c}^{\delta} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{\delta\to+\infty} \int_{c}^{\delta} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{\delta\to+\infty} [\arctan(x+1)]_{c}^{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to+\infty} \arctan(\delta+1) - \arctan(c+1) = \arctan[\lim_{\delta\to+\infty}(\delta+1)] - \arctan(c+1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan(c+1).$$

Dunque l'integrale assegnato converge e vale

$$\arctan(c+1) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(c+1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

5)

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Per quest'ultimo esercizio basta osservare che l'integrale assegnato è della forma

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}},$$

con $\alpha = \frac{1}{2}$, e tale integrale diverge quando $\alpha \leq 1$.

Calcolare i seguenti integrali impropri, provando che risulta:

1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Applichiamo il metodo della sostituzione, poniamo

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x dx = dt,$$

dunque

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}.$$

Otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t - t^2}}\, dt.$$

Utilizziamo ora il risultato ottenuto in 4) del primo gruppo di esercizi. Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}\, dx = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t - t^2}}\, dt = 2 \lim_{\delta \to 0} [\arcsin \sqrt{t}]_\delta^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \lim_{\delta \to 0} \left[-\arcsin \sqrt{\delta} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right] =$$

$$= -2 \arcsin(\lim_{\delta \to 0} \sqrt{\delta}) + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx + \int_{c}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx.$$

Risolviamo i due integrali separatamente, si ha

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = \lim_{\delta \to -\infty} \int_\delta^{c} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx.$$

Osserviamo che, ponendo

$$e^x = t \quad \Rightarrow \quad e^x dx = dt,$$

si ottiene, per quanto riguarda l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t + c = \arctan e^x + c.$$

Dunque

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{\delta\to-\infty}[\arctan e^x]_\delta^c =$$

$$= \arctan e^c - \lim_{\delta\to-\infty} \arctan e^\delta = \arctan e^c - \arctan(\lim_{\delta\to-\infty} e^\delta) = \arctan e^c.$$

Per il secondo si ha

$$\int_{c}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{\delta\to+\infty}[\arctan e^x]_c^\delta =$$

$$= \lim_{\delta\to+\infty} \arctan e^\delta - \arctan e^c = -\arctan e^c + \arctan(\lim_{\delta\to+\infty} e^\delta) = \frac{\pi}{2} - \arctan e^c.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan e^c + \frac{\pi}{2} - \arctan e^c = \frac{\pi}{2}$$

3)

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = \pi + 2.$$

Risolviamo innanzitutto l'integrale indefinito, abbiamo

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = \int \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{2}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int (-2x)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\sqrt{4-x^2} + c = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + c.$$

Dunque

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = \lim_{\delta\to2}\int_0^\delta \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx =$$

$$= \lim_{\delta\to2}[2\arcsin\frac{\delta}{2} - \sqrt{4-\delta^2} + 2] = \pi + 2.$$

4)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

Abbiamo

$$x^3+3x^2+2x = x(x^2+3x+2) = x(x+2)(x+1).$$

Dunque determiniamo A, B e C tali che

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}$$

quindi risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

si ha $A = 1/2$, $B = 1/2$ e $C = -1$. Perciò

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\,dx = \lim_{\delta\to+\infty}\int_1^{\delta} \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to+\infty}\int_1^{\delta}\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\lim_{\delta\to+\infty}\int_1^{\delta}\frac{1}{x+2}\,dx - \lim_{\delta\to+\infty}\int_1^{\delta}\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \lim_{\delta\to+\infty}[\ln\frac{\sqrt{\delta(\delta+2)}}{\delta+1} - \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2] =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 = \frac{1}{2}(2\ln 2 - \ln 3) = \frac{1}{4}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

5)

$$\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

Si ha

$$\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{\delta\to 2}\int_1^{\delta} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\delta\to 2}\left[\arcsin\frac{\delta}{2} - \arcsin\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi-\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

1) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Calcolare esplicitamente l'integrale

$$\int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx.$$

Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x}.$$

Essa, pertanto, non è integrabile in $(0, +\infty)$. D'altra parte si ha

$$\int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} [(x+1)\log(x+1) - x - x\log x + x]_\delta^1 =$$

$$= 2\log 2 - \lim_{\delta \to 0} [(x+1)\log(x+1) - x\log x] = 2\log 2.$$

2) Applicando i criteri di integrabilità, stabilire se esiste finito

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\, dx.$$

In caso affermativo, calcolare l'integrale.

Per $x \to 0^+$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La funzione pertanto risulta integrabile in senso improprio in $(0, 1]$. Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x}$, da cui

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \quad t(0) = 0 \text{ e } t(1) = 1,$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^3}\, dt = -\left[\frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

3) Stabilire, mediante i teoremi di confronto, se i seguenti integrali sono o non sono convergenti

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}\,dx; \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}}\,dx$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\arctan x}} = 1,$$

esiste $k > 0$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{\arctan x}} < \frac{k}{\sqrt{x}.}$$

Essendo poi

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{x^2+1} < 1 \quad \text{per} \quad x \in (0,1],$$

la funzione integranda si maggiora con $\frac{k}{\sqrt{x}}$ in $(0,1]$. Allora l'integrale è convergente, e si vede facilmente che vale $\sqrt{\pi}$. Per il secondo, essendo

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{4}} - (1+x+x^2)^{\frac{3}{4}}} \le \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{4}}},$$

l'integrale è convergente perchè $\frac{3}{4} < 1$.

4) Verificare che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

è convergente.

Essendo, per $x \in [1,+\infty)$, $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$, si ha

$$0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

L'integrale proposto è dunque convergente.

5) Dire se il seguente integrale è convergente

$$\int_1^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx.$$

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Dunque per il teorema del confronto asintotico, si ha che l'integrale considerato converge.