1.1 Integrali indefiniti

Servendosi degli integrali immediati ed usando le proprietà degli integrali studiate, calcolare i seguenti integrali e verificare i risultati ottenuti:

1)

$$\int x^3 \sqrt[5]{x}\, dx.$$

Osserviamo che

$$\int x^3 \sqrt[5]{x}\, dx = \int x^{3+\frac{1}{5}}\, dx = \int x^{\frac{16}{5}}\, dx$$

dunque ricordando che

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c,$$

si ottiene

$$\int x^3 \sqrt[5]{x}\, dx = \frac{1}{1+\frac{16}{5}} x^{1+\frac{16}{5}} + c = \frac{5}{21} x^{\frac{21}{5}} + c = \frac{5}{21} \sqrt[5]{x^{21}} + c = \frac{5}{21} x^4 \sqrt[5]{x} + c.$$

Per verificare il risultato deriviamo la funzione ottenuta, si ha

$$\left(\frac{5}{21} x^4 \sqrt[5]{x} + c\right)' = \left(\frac{5}{21} x^{\frac{21}{5}} + c\right)' = \frac{5}{21} \cdot \frac{21}{5} x^{\frac{21}{5}-1} = \sqrt[5]{x^{16}} = x^3 \sqrt[5]{x}.$$

2)

$$\int (1+\cos x)^5 \sin x\, dx.$$

Poichè $(1+\cos x)' = -\sin x$, usiamo la seguente regola

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1}$$

e otteniamo

$$\int (1+\cos x)^5 \sin x \, dx = -\int (1+\cos x)^5 (-\sin x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{6}(1+\cos x)^6 + c.$$

Si ha

$$\left(-\frac{1}{6}(1+\cos x)^6 + c\right)' = -\frac{1}{6}\cdot 6(1+\cos x)^5 (1+\cos x)' =$$

$$= -(1+\cos x)^5(-\sin x) = \sin x (1+\cos x)^5.$$

Dunque il risultato ottenuto è esatto.

3)

$$\int \frac{1}{5+2x}\, dx.$$

Osserviamo, per le proprietà degli integrali, che

$$\int \frac{1}{5+2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{5+2x}\, dx$$

dunque se usiamo la regola

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c,$$

otteniamo

$$\int \frac{1}{5+2x}\, dx = \frac{1}{2}\ln|5+2x| + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto

$$\left(\frac{1}{2}\ln|5+2x| + c\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5+2x} = \frac{1}{5+2x}.$$

4)

$$\int x^2 \cos(x^3)\, dx.$$

Anche in questo caso si ha

$$\int x^2 \cos(x^3)\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \cos(x^3)\, dx$$

e $(x^3)' = 3x^2$. Dunque ricordando che

$$\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \sin f(x) + c,$$

abbiamo

$$\int x^2 \cos(x^3)\, dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c.$$

Si ha

$$\left(\frac{1}{3} \sin(x^3) + c\right)' = \frac{1}{3} \cos(x^3)(x^3)' = \frac{1}{3} 3x^2 \cos(x^3) = x^2 \cos(x^3).$$

Dunque il risultato ottenuto è esatto.

5)

$$\int \frac{(\tan x)^3}{(\cos x)^2}\, dx.$$

Osserviamo che

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

abbiamo

$$\int \frac{(\tan x)^3}{(\cos x)^2}\, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + c.$$

Si ha

$$\left(\frac{1}{4} \tan^4 x + c\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4 \tan^3 x (\tan x)' = \tan^3 x \frac{1}{\cos^2 x},$$

che coincide con la funzione integranda dell'esercizio proposto.

6)

$$\int \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{1}{x}\, dx.$$

Usiamo il fatto che

$$\int \frac{1}{1 + f^2(x)} f'(x)\, dx = \arctan(f(x)) + c$$

e che

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

otteniamo

$$\int \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \arctan(\ln x) + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto

$$(\arctan(\ln x)+c)' = \frac{1}{1+\ln^2 x}(\ln x)' = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

7)

$$\int \frac{5+x^2}{x^2+1}\,dx.$$

Abbiamo, grazie alle proprietà degli integrali,

$$\int \frac{5+x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{5+x^2-4+4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x + 4\arctan x + c.$$

Si ha

$$(x+4\arctan x+c)' = 1 + \frac{4}{1+x^2} = \frac{1+x^2+4}{1+x^2} = \frac{x^2+5}{1+x^2}.$$

Il risultato ottenuto è esatto.

8)

$$\int (e^x + e^{-x})\,dx.$$

Abbiamo, per la linearità dell'integrale, che

$$\int (e^x+e^{-x})\,dx = \int e^x\,dx + \int e^{-x}\,dx = \int e^x\,dx - \int (-e^{-x})\,dx = e^x - e^{-x} + c.$$

Il risultato ottenuto è esatto, infatti abbiamo

$$(e^x - e^{-x} + c)' = e^x - (-e^{-x}) = e^x + e^{-x}.$$

9)

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1+\sin x}\,dx.$$

Si ha

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\sin x(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}\,dx = \int (\sin x - \sin^2 x)\,dx =$$

$$= \int \sin x\,dx - \int \sin^2 x\,dx = -\cos x - \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto abbiamo

$$(-\cos x - \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x))' = -(-\sin x) - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) =$$

$$= \sin x - \frac{1}{2}(1 - 1 + \sin^2 + \sin^2 x) = \sin x - \sin^2 x.$$

10)

$$\int \frac{x + \arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Abbiamo

$$\int \frac{x + \arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)^{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\cdot\arcsin^3 x + c = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\arcsin^3 x + c.$$

Deriviamo la funzione ottenuta

$$(-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\arcsin^3 x + c)' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) + \frac{1}{3}\cdot 3\arcsin^2 x \cdot \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin^2 x}{1-x^2}.$$

Il risultato ottenuto è giusto.

Calcolare con il **metodo di sostituzione** i seguenti integrali e verificare i risultati ottenuti:

1)

$$\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Poniamo

$$\sqrt{x} = t.$$

Si ha

$$x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t\,dt,$$

dunque

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2t\cdot\frac{1+e^t}{t}\,dt =$$
$$= 2\int (1+e^t)\,dt = 2\int dt + 2\int e^t\,dt =$$
$$= 2t + 2e^t + c = 2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto

$$(2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}} + c)' = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},$$

come volevasi dimostrare.

2)

$$\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}\,dx.$$

Poniamo

$$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}\cdot dx = dt,$$

otteniamo

$$\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt =$$
$$= \tan t + c = \tan(\ln x) + c.$$

Deriviamo la funzione ottenuta, si ha

$$(\tan(\ln x) + c)' = \frac{1}{\cos^2(\ln x)}(\ln x)' = \frac{1}{x\cos^2(\ln x)},$$

il risultato è esatto.

3)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Poniamo $1-x=t^2$ si ha

$$x = 1-t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = -2tdt,$$

otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx = -2\int \frac{t}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -2\arcsin t + c = -2\arcsin(\sqrt{1-x}) + c.$$

Verifichiamo che la derivata della funzione ottenuta coincide con la funzione integranda dell'esercizio proposto. Abbiamo

$$(-2\arcsin\sqrt{1-x}+c)' = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

4)

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

In quest'ultimo esercizio poniamo

$$\cos x = t \quad\Rightarrow\quad -\sin x dx = dt$$

e dunque

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$
$$= -\arctan t + c = -\arctan(\cos x) + c.$$

Si ha

$$(-\arctan(\cos x)+c)' = -\frac{1}{1+\cos^2 x}(\cos x)' = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

Risolvere i seguenti integrali:

1)

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+1}.$$

Osserviamo che il polinomio al denominatore ha radici reali distinte, dunque si ha

$$x^2+3x+1 = \left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(2x+3-\sqrt{5})(2x+3+\sqrt{5}).$$

Ora determiniamo A e B tali che

$$\frac{1}{(2x+3-\sqrt{5})(2x+3+\sqrt{5})} = \frac{A}{2x+3-\sqrt{5}} + \frac{B}{2x+3+\sqrt{5}}.$$

Abbiamo

$$A(2x+3-\sqrt{5})+B(2x+3+\sqrt{5}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2A+2B=0, \\ A(3+\sqrt{5})+B(3-\sqrt{5})=1. \end{cases}$$

Risolvendo il semplice sistema si trova

$$A = \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Dunque abbiamo, per la linearità dell'integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+1} = \frac{4}{2\sqrt{5}} \int \frac{1}{2x+3-\sqrt{5}}\,dx - \frac{4}{2\sqrt{5}} \int \frac{1}{2x+3+\sqrt{5}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{2}{2x+3-\sqrt{5}}\,dx - \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{2}{2x+3-\sqrt{5}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln|2x+3-\sqrt{5}| - \frac{1}{\sqrt{5}} \ln|2x+3+\sqrt{5}| + c = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + c.$$

2)

$$\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx.$$

Dividendo il polinomio al numeratore per quello al denominatore otteniamo

$$6x^4-5x^3+4x^2 = (3x^2-x)(2x^2-x+1)+x,$$

quindi si ha

$$\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx = \int (3x^2-x)\,dx + \int \frac{x}{2x^2-x+1}\,dx.$$

Risolviamo innanzitutto il secondo integrale della precedente espressione, si ha

$$\int \frac{x}{2x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{4x-1+1}{2x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x-1}{2x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2-x+1}\,dx.$$

Ora il primo integrale è uguale a

$$\frac{1}{4}\ln(2x^2 - x + 1) + c$$

mentre per il secondo abbiamo

$$2x^2 - x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right),$$

troviamo A e B tale che

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = (x - A)^2 + B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad B = \frac{7}{16}.$$

Dunque

$$\int \frac{1}{2x^2 - x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}\, dx.$$

Ricordiamo che

$$\int \frac{1}{a^2 + g^2(x)}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{g(x)}{a} + c,$$

otteniamo

$$\int \frac{1}{2x^2 - x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\arctan\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{7}}{4}} + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{4x - 1}{\sqrt{7}} + c.$$

Abbiamo

$$\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1}\, dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln(2x^2 - x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4x - 1}{\sqrt{7}} + c.$$

3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}.$$

Osserviamo che

$$-4x^2 - 3x + 2 = -4\left(x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

e troviamo A e B tali che

$$x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = (x - A)^2 + B \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{8} \quad \text{e} \quad B = -\frac{41}{64}$$

Dunque

$$-4x^2 - 3x + 2 = -4\left[\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{41}{64}\right] = 4\left[\frac{41}{64} - \left(x + \frac{3}{8}\right)^2\right].$$

Ricordiamo che

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + c,$$

otteniamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2 - \left(x + \frac{3}{8}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x + \frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}} + c = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x + 3}{\sqrt{41}} + c.$$

4)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}}.$$

Abbiamo

$$5x^2 - x - 1 = 5\left(x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right),$$

Scriviamo

$$x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$$

nella forma

$$(x - A)^2 + B$$

otteniamo $A = \frac{1}{10}$ e $B = -\frac{21}{100}$. Si ha, ricordando che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{10}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{10dx}{\sqrt{(10x - 1)^2 - (\sqrt{21})^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x - 1\sqrt{(10x - 1)^2 - 21}| + c.$$

Calcolare con il **metodo di integrazione per parti** i seguenti integrali e verificare i risultati ottenuti:

1)

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Abbiamo, riscrivendo la funzione integranda in modo opportuno e applicando il metodo di integrazione per parti, si ha

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int (x+1)^{-\frac{1}{2}} \arcsin x\, dx =$$

$$= \int (2\sqrt{x+1})' \arcsin x\, dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x - \int 2\sqrt{x+1}(\arcsin x)'\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \sqrt{x+1}\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \sqrt{\frac{x+1}{(1-x)(1+x)}}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 2\int [-(1-x)^{-\frac{1}{2}}]\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 2\cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1-x)^{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto

$$(2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + c)' = 2\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\arcsin x + 2\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+4\cdot\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}(-1) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} + 2\sqrt{\frac{x+1}{(x+1)(1-x)}} - \frac{2}{\sqrt{1-x}}.$$

2)

$$\int x \arcsin x\, dx.$$

Si ha

$$\int x\arcsin x\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arcsin x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int x^2 (\arcsin x)'\, dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Risolviamo l'ultimo integrale per sostituzione poniamo

$$x = \sin t \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t dt$$

otteniamo

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt =$$

$$= \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}\,dt = \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t}\,dt =$$

$$= \int \sin^2 t\,dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cos t \sin t + c =$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

Dunque l'integrale di partenza sarà

$$\int x \arcsin x\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

Deriviamo la funzione ottenuta

$$\left(\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c\right)' =$$

$$= \frac{2x}{2}\arcsin x + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} +$$

$$+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x) = x\arcsin x + \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{4\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{2x^2 - 1 + (1-x^2) - x^2}{4\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x,$$

il risultato ottenuto è esatto.

3)

$$\int x\cos x\,dx.$$

Riscrivendo la funzione in modo opportuno e usando il metodo di integrazione per parti otteniamo

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

Verifichiamo il risultato

$$(x\sin x+\cos x+c)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

4)

$$\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\,dx.$$

Abbiamo

$$\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\,dx=\int (x)'\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\,dx=$$

$$=x\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)-\int x\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\right)'\,dx=$$

$$=x\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)'\,dx=$$

$$=x\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\,dx=$$

$$=x\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)-\frac{1}{2}\int x\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=$$

$$=x\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$$

Risolviamo l'integrale che appare nella precedente espressione con il metodo di sostituzione, poniamo

$$x=t^2\quad\Rightarrow\quad dx=2tdt,$$

si ha

$$\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int 2t\frac{t}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt=\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\int dt-\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=t-\arctan t+c=\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}+c.$$

Dunque

$$\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\,dx=x\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c.$$

Controlliamo il risultato ottenuto verificando che la derivata della funzione ottenuta coincida con la funzione integranda dell'esercizio proposto.

$$\left(x \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + c\right)' =$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)' - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} =$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) + \frac{x}{\sqrt{\frac{x+1-x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} =$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) + x\sqrt{1+x}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-(1+x)+1}{2\sqrt{x}(1+x)} =$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} + \frac{-1-x+1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right).$$

5)

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\, dx.$$

Per la linearità dell'integrale abbiamo

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\, dx = \int x^2 e^{-x}\, dx - 2\int x e^{-x}\, dx + 5\int e^{-x}\, dx.$$

Applicando il metodo di integrazione per parti ai primi due integrali otteniamo

$$\int (x^2-2x+5)e^{-x}\, dx = \int x^2(-e^{-x})'\, dx - 2\int x(-e^{-x})'\, dx - 5\int (-e^{-x}) dx =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\, dx + 2xe^{-x} - 2\int e^{-x}\, dx - 5e^{-x} =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2\int x(-e^{-x})'\, dx + 2e^{-x} - 5e^{-x} + c =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2xe^{-x} - 2\int (-e^{-x})\, dx - 3e^{-x} + c =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} - 3e^{-x} + c = -(x^2+5)e^{-x} + c.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto, si ha

$$(-(x^2+5)e^{-x} + c)' = -(x^2+5)(-e^{-x}) - 2xe^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x + 5).$$

6)

$$\int \frac{\log x}{x^3}\,dx.$$

Abbiamo

$$\int \frac{\log x}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\log x\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{-x^{-2}}{2}\right)' \log x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\log x + \int \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\log x + \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\log x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3+1}x^{-2} + c =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\log x - \frac{1}{4x^2} + c = -\frac{1}{2x^2}\left(\log x + \frac{1}{2}\right) + c.$$

Si ha

$$\left(-\frac{1}{2x^2}(\log x + \frac{1}{2}) + c\right)' = -\frac{1}{2}(x^{-2})'\log x - \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{4}(x^{-2})' =$$

$$= -\frac{1}{2}(-2)x^{-3}\log x - \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4}(-2)x^{-3} = \frac{\log x}{x^3} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^3} = \frac{\log x}{x^3}.$$

Il risultato ottenuto è esatto.

7)

$$\int x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\,dx.$$

Si ha

$$\int x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{-x^2}{1-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{-1+1-x^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{1-x^2}{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{1-x^2}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + \int \frac{1}{1-x^2}\,dx.$$
Risolviamo separatamente l'ultimo integrale, abbiamo
$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$
Dunque l'integrale di partenza è uguale a
$$\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$
Deriviamo la precedente espressione, abbiamo
$$\frac{2}{2}x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} - 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+1+x}{(1-x)^2} =$$
$$= x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{-2}{1+x} - 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)} =$$
$$= x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{x^2}{1-x^2} - 1 + \frac{1}{1-x^2} = x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{-x^2-1+x^2+1}{1-x^2} =$$
$$= x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$
Il risultato ottenuto è esatto.

8)
$$\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx.$$
Abbiamo
$$\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx = \int e^{-x}\sin^2 x\,dx = \int e^{-x}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\,dx =$$
$$= -\int \frac{e^{-x}}{2}\,dx - \int \frac{e^{-x}\cos 2x}{2}\,dx =$$
$$= -\frac{e^{-x}}{2} - \int e^{-x}\left(\frac{\sin 2x}{4}\right)'\,dx = -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x + \int (-e^{-x})\cdot\frac{\sin 2x}{4}\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin x\cos x\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cdot\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)'\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x - \frac{e^{-x}}{4}\sin^2 x + \frac{1}{2}\int(-e^{-x})\cdot\frac{\sin^2 x}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x - \frac{e^{-x}}{4}\sin^2 x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cdot\sin^2 x\,dx.$$

Dunque si ha

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\int e^{-x}\sin^2 x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x - \frac{e^{-x}}{4}\sin^2 x + c$$

$$\Downarrow$$

$$\int e^{-x}\sin^2 x\,dx = \frac{4}{5}\left[-\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x - \frac{e^{-x}}{4}\sin^2 x\right] + c.$$

Deriviamo l'espressione così ottenuta si ha

$$\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x - \frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\sin^2 x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin x\cos x\right] =$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}(1-2\sin^2 x) + \frac{1}{4}e^{-x}\sin^2 x\right] = e^{-x}\sin^2 x.$$

Il risultato è esatto.

Integrare le seguenti funzioni razionali fratte:

1)

$$\int \frac{1}{6x^3-7x^2-3x}\,dx.$$

Abbiamo

$$\int \frac{1}{6x^3-7x^2-3x}\,dx = \int \frac{1}{6x\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\,dx.$$

Ora determiniamo A, B, C tali che

$$\frac{1}{x\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{\left(x-\frac{3}{2}\right)} + \frac{C}{\left(x+\frac{1}{3}\right)},$$

dunque dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -\frac{7}{6}A+\frac{1}{3}B-\frac{3}{2}C=0 \\ -\frac{1}{2}A=1 \end{cases}$$

si ottiene

$$A=-2, \quad B=\frac{4}{11} \quad \text{e} \quad C=\frac{18}{11}.$$

Otteniamo

$$\int \frac{1}{6x^3-7x^2-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{2}{33}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\,dx + \frac{3}{11}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{33}\ln\left|x-\frac{3}{2}\right| + \frac{3}{11}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right| + c.$$

2)

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$$

Dividiamo il polinomio al numeratore per quello al denominatore si ottiene

$$x^5+x^4-8=(x^2+x+4)(x^3-4x)+4x^2+16x-8,$$

dunque

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \int (x^2+x+4)\,dx + 4\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx.$$

Ora, determiniamo A, B e C tali che

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x} = \frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Dunque risolviamo il sistema seguente

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 2B-2C=4 \\ -4A=-2 \end{cases}$$

si ottiene

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{5}{4} \quad \text{e} \quad C=-\frac{3}{4}.$$

Dunque si ha

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \int x^2\,dx + \int x\,dx + 4\int dx + 4\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx +$$

$$+4\cdot\frac{5}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx + 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + c.$$

3)

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,dx.$$

Abbiamo

$$\frac{x}{x^4-3x^2+2} = \frac{x}{(x^2-2)(x^2-1)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}.$$

Scegliamo A, B, C, D tali che

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \frac{A}{x+\sqrt{2}} + \frac{B}{x-\sqrt{2}} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1},$$

che equivale a risolvere il sistema che segue

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ -\sqrt{2}A+\sqrt{2}B-C+D=0 \\ -A-B-2C-2D=1 \\ \sqrt{2}A-\sqrt{2}B+2C-2D=0 \end{cases}$$

si ottiene

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2}\quad \text{e}\quad D=-\frac{1}{2}.$$

Dunque

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+\sqrt{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-\sqrt{2}}\,dx +$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}} + c.$$

4)

$$\int \frac{1}{x^4-2}\,dx.$$

Anche in questo caso si possono determinare A, B, C e D tali che

$$\frac{1}{x^4-2} = \frac{1}{(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})(x^2+\sqrt{2})} = \frac{A}{(x-\sqrt[4]{2})} + \frac{B}{(x+\sqrt[4]{2})} + \frac{Cx+D}{(x^2+\sqrt{2})}$$

(Osserviamo che il polinomio x^4-2 ha due radici reali distinte e due complesse coniugate). Risolviamo quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ \sqrt[4]{2}A-\sqrt[4]{2}B+D=0 \\ \sqrt{2}A+\sqrt{2}B-\sqrt{2}C=0 \\ \sqrt{2}\sqrt[4]{2}A-\sqrt{2}\sqrt[4]{2}B-\sqrt{2}D=1 \end{cases}$$

si ottiene

$$A=\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}, \quad B=-\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}, \quad C=0 \quad \text{e} \quad D=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{x^4-2}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\int \frac{1}{x-\sqrt[4]{2}}\,dx +$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\int \frac{1}{x+\sqrt[4]{2}}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\ln|x-\sqrt[4]{2}| - \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\ln|x+\sqrt[4]{2}| - \frac{\sqrt[4]{2}}{4}\arctan\frac{x}{\sqrt[4]{2}} + c.$$

5)

$$\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx.$$

Abbiamo

$$\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} = \frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3},$$

dunque determiniamo A e B tali che

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x+1)^3},$$

(osserviamo che le radici del polinomio $(x^2-1)^3$, sono tutte reali!). Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A+3B=0 \\ 3A+3B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1. \end{cases}$$

si ottiene

$$A=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad B=\frac{1}{2}.$$

Dunque

$$\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\int (x+1)^{-3}\,dx + \frac{1}{2}\int (x-1)^{-3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3+1}(x+1)^{-3+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3+1}(x-1)^{-3+1} + c =$$

$$= \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{4(x-1)^2} + c = -\frac{x}{(x^2-1)^2} + c.$$

6)

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx.$$

Troviamo A, B e C tali che

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

si ottiene

$$A=\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad C=\frac{2}{3}.$$

Otteniamo

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

7)
$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$$

Dividiamo il polinomio al numeratore per quello al denominatore otteniamo
$$x^4+1 = (x^3-x^2+x-1)(x+1) + 2.$$
Determiniamo inoltre A, B e C tali che
$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$
Risolviamo cioè il seguente sistema
$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A=0 \\ C-B=1 \end{cases}$$
otteniamo
$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{2}.$$
Si ha
$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int (x+1)\,dx + 2\int \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + c.$$