Studio di funzioni, sviluppi di Taylor e serie

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+\log n}.$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+2(-1)^n n}.$$

   (Far vedere che tale serie mostra che il criterio di Leibniz fornisce solo condizione sufficiente e non necessaria per la convergenza semplice!!)

3. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{2/n}-1-x/n}{\sqrt{1/n}}$$

   i) è definitivamente a termini di segno fissato;

   ii) è convergente per $x=2$ e divergente per $x\neq 2$.

   Suggerimento: si usi lo sviluppo di Taylor di e^t con $t=2/n$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in zero di ordine 5 della seguente funzione:

$$f(x)=x-\sin x.$$

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3, in $x_0=1$, della seguente funzione

$$g(x)=x-e^{x-1}.$$

6. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2(n+1)}\right]$$

   converge assolutamente per $(-1-\sqrt{5})/2<x<(-1+\sqrt{5})/2$ e semplicemente $(-1-\sqrt{5})/2\leq x\leq(-1+\sqrt{5})/2$.

7. Calcolare il seguente
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)-x}{x\arctan x}.$$

8. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{per } 0 \le x \le 1, \\ \log|x| & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

   Determinare l'insieme di definizione. Studiare il segno. Calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione. Dire se ci sono asintoti. Determinare l'insieme di continuità e di derivabilità. Studiare crescenza e decrescenza con eventuali massimi e minimi relativi. Studiare concavità e convessità con eventuali flessi. Disegnare il grafico.

9. Calcolare, con un errore inferiore a 10^{-7}, $\sqrt{e}$.

10. Provare che
$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$
   è lipschitziana.

11. Provare che vale la seguente disuguaglianza:
$$e^x y \le \frac{1}{p} e^{px} + \frac{p-1}{p} y^{\frac{p}{p-1}},$$
   per ogni $p > 1$ e $x, y \ge 0$.

12. Provare che $f(x) = \sin(|x|^\theta)$ è hölderiana. Quale è l'esponente di hölderianità?

Soluzioni

1. Conviene innanzitutto controllare se la serie converge assolutamente (poichè convergenza assoluta implica convergenza semplice). Dunque studiamo la seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}.$$

   Osserviamo che per lo studio della convergenza assoluta possiamo usare i criteri usati per lo studio delle serie a segno costante. Abbiamo
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$
   poichè
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)} = 1.$$

Dunque essendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

una serie divergente, la serie considerata non converge assoltamente. Vediamo se la serie assegnata converge almeno semplicemente. Essendo la seria data a segni alterni (della forma $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$), controlliamo se è possibile applicare il teorema di Leibniz. Si ha, posto $a_n = 1/(\sqrt{n} + \log n)$, che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \quad \text{e} \quad a_{n+1} < a_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N};$$

infatti $\log(n+1) > \log n$ e $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ e quindi

$$\frac{1}{\log(n+1) + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\log n + \sqrt{n}}.$$

La serie assegnata converge semplicemente.

2. Osserviamo innanzitutto che per n pari, il termine generico della serie diventa

$$\frac{1}{n^2 + 2n} \geq 0$$

e per n dispari

$$\frac{1}{n^2 - 2n} \geq 0.$$

Quindi

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n^2 + 2(-1)^n n} \right| = \frac{1}{n^2 + 2(-1)^n n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Pertanto la serie proposta converge assolutamente, dunque anche semplicemente. Notiamo che in questo caso non è possibile applicare il criterio di Leibniz. La serie è a segni alterni, la succesione $a_n = 1/(n^2 + 2(-1)^n n)$ è infinitesima, ma non è soddisfatta la condizione di monotonia. Infatti se n è dispari (cioè $n+1$ pari), si ha

$$a_n = \frac{1}{n^2 - 2n} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 + 2(n+1)},$$

e si verifica facilmente che $a_n > a_{n+1}$. Al contrario se n è pari (cioè $n+1$ dispari), si ha

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 - 2(n+1)},$$

e si verifica facilmente che $a_n < a_{n+1}$. Questo fatto mostra che il criterio di Leibniz fornisce solo una condizione sufficiente e non necessaria per la convergenza semplice di una serie.

3. Osserviamo che utilizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in zero per e^x, con $x = 2/n$ (e possiamo farlo poichè $2/n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$), si ottiene

$$\frac{e^{2/n} - 1 - x/n}{\sqrt{1/n}} \sim \sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 - 1 - \frac{x}{n} \right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{2-x}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \frac{2-x}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Pertanto la serie proposta è asintotica alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2-x}{n^{\frac{1}{2}}}$$

per $x \neq 2$ e alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

per $x = 2$; quindi definitivamente a termine di segno fissato (positivo per $x \leq 2$ e negativa per $x > 2$) e dal confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, risulta essere divergente per $x \neq 2$ e convergente per $x = 2$, come volevasi dimostrare.

4. Ricordiamo lo sviluppo di Taylor di $\sin x$ di centro zero e ordine cinque:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Dunque

$$x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

5. Si può procedere in due modi differenti. Calcoliamo $g(1) = 1 - 1 = 0$,

$$g'(x) = 1 - e^{x-1} \quad \Rightarrow \quad g'(1) = 1 - 1 = 0,$$
$$g''(x) = -e^{x-1} \quad \Rightarrow \quad g''(1) = -1$$

e

$$g'''(x) = -e^{x-1} \quad \Rightarrow \quad g'''(1) = -1,$$

dunque lo sviluppo di Taylor di ordine tre e centro $x_0 = 1$ è

$$g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3) =$$
$$= -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Oppure possiamo utilizzare lo sviluppo di Taylor, già noto, di ordine tre e centro zero di e^y, e poi sostituire a y, $x - 1$. Si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$$

e dunque

$$e^{x-1} = 1 + x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3)$$
$$\Downarrow$$
$$x - e^{x-1} = x - x - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3) =$$
$$= -\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3).$$

6. Ponendo
$$a_n(x) = (-1)^n \left[\frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2(n+1)}\right],$$
dal criterio della radice si ottiene che, se
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x^2+x-1}}{\sqrt[n]{2(n+1)}} = e^{x^2+x-1} < 1,$$
allora la serie convergerà assolutamente. Ora
$$e^{x^2+x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1-\sqrt{5})/2 < x < (-1+\sqrt{5})/2$$
come volevasi dimostrare. Se $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ la serie assegnata diventa
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2(n+1)},$$
che è una serie a segni alterni e posto $a_n = 1/[2(n+1)]$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \text{e} \quad a_{n+1} < a_n \quad \forall\ n.$$
Dunque la serie assegnata converge semplicemente, per il criterio di Leibniz, ma non assolutamente infatti la serie dei moduli è asintotica alla serie armonica che diverge.

7. Ricordiamo gli sviluppi di Taylor in zero delle funzioni $\arctan x$, e^x e $\sin y$:
$$\arctan x = x + o(x), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{e} \quad \sin y = y + o(y).$$
si ha, ponendo $y = e^x - 1 = x + x^2/2 + o(x^2)$,
$$\sin(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
Dunque
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1) - x}{x \arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2/2 + o(x^2) - x}{x(x + o(x))} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

8. La funzione assegnata è definita su tutto $\mathbb{R}$. Per quanto riguarda il segno, essendo $1 + x^2 > 0$ per ogni x e $\log|x| > 0$ se $|x| > 1$, la funzione considerata è positiva in $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ e negativa in $(-1, 0)$. Abbiamo
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \log|x| = +\infty.$$

Dunque non ci sono asintoti orizzontali e nemmeno verticali (la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$). Non ci sono neanche asintoti obliqui, infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log|x|}{x} = 0.$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \log|x| = -\infty.$$

La funzione data non è continua in 0 (in tale punto ha una discontinuità di seconda specie). Inoltre la funzione non è continua nemmeno in 1 infatti

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log|x| = 0$$

(in tale punto la funzione ha un salto!! Discontinuità di prima specie). La funzione è continua in $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ (in tali intervalli la funzione è definita da funzioni continue). Nello stesso intervallo la funzione è anche derivabile poichè definita da funzioni derivabili. Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } 0<x<1, \\ x/|x|^2 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

dunque la funzione è crescente in $(0,1)\cup(1,+\infty)$, decrescnte in $(-\infty,0)$ e non ha nè massimi nè minimi. Inoltre

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } 0<x<1, \\ -1/|x|^2 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

la funzione proposta è quindi concava in $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, convessa in $(0,1)$ e non possiede flessi.

9. Utilizziamo l formula di Taylor per la funzione e^x con centro $x_0 = 0$ e con $x = \frac{1}{2}$. Poichè $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni n e dato che e^x è strettamente crescente risulta

$$M_{n+1} = \max\{|f^{(n+1)}(x)| : x\in[0,1/2]\} = \max\{e^x : x\in[0,1/2]\} = \sqrt{e} < \sqrt{3}.$$

Sappiamo che

$$|R_n(x)| \le M_{n+1}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

dunque

$$|R_n(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{(n+1)!2^{n+1}}.$$

Ad esempio per $n = 8$ si trova $|R_n(x)| < \sqrt{3}/(9!2^9) < 10^{-7}$. Quindi otteniamo $\sqrt{e}$ con un errore inferiore a 10^{-7} dal polinomio di Taylor per e^x con $x_0 = 0$, $x = 1/2$ e $n = 8$.

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^8}{8!}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{2^8 8!} \cong ...$$

Il valore di $\sqrt{e}$ che otterrete è esatto fino alla sesta cifra decimale.

10. Ricordiamo la definizione di funzione lipschitziana: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **lipschitziana** se per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ risulta

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Se f è in più derivabile allora ha derivata limitata e vale il viceversa. Dunque essendo

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$$

la funzione assegnata è lipschitziana.

11. La disuguaglianza proposta segue facilmente dalla disuguaglianza di Young:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{p-1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} \quad \forall\ x, y \leq 0 \quad \text{e} \quad p \geq 1.$$

Infatti se sostituiamo in quest'ultima x con e^x otteniamo la disuguaglianza assegnata. Dimostriamo la disuguaglianza di Young. Posto

$$g(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{p-1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} - xy$$

si ha

$$g'(x) = \frac{px^{p-1}}{p} - y$$

dunque g ha un minimo assoluto in $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ (assoluto poichè $g(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$). Per definizione di minimo assoluto otteniamo la disuguaglianza di Young, infatti

$$g(x) \geq g(y^{\frac{1}{p-1}}) = 0.$$

12. Usiamo il fatto che $\sin x$ è lipschitziana con costante di lipschitz uguale a 1 e che x^θ è hölderiana con esponente di hölderianità θ. Otteniamo, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x^\theta) - \sin(y^\theta)| \leq |x^\theta - y^\theta| \leq |x - y|^\theta.$$

dunque la funzione assegnata è hölderiana, con esponente di hölderianità θ.